



UNIVERSITY OF  
EASTERN FINLAND

# **Matemaattiset valmiudet luonnontieteiden opinnoissa**

**Olli Toivanen, netissä (Opiskelutaidot-webinaari), 18.1.2022**



# Matematiikka on luonnontieteiden kieli

- Ja joskus kieliopinnot ovat tylsiä
- Sanaston tankkaaminen ei ole kivaa; mutta se ei ole kielenoppimisen pointti

Kielen tasoja:

1. "auto kulkee lujaa"
2. "auto kulkee nyt 144 km/h"
3. "auton nopeutta hetkellä  $t$  kuvaa funktio  $v(t)$ "



# Luonto puhuu matematiikkaa

- Esimerkki: saaliit ja saalistajat, stokastinen Lotka-Volterra differentiaaliyhtälö:

$$dX_1(t) = X_1(t)(a_{10} - a_{11}X_1(t) - a_{12}X_2(t)) dt + X_1(t) dE_1(t)$$

$$dX_2(t) = X_2(t)(-a_{20} + a_{21}X_1(t) - a_{23}X_3(t)) dt + X_2(t) dE_2(t)$$

⋮

$$dX_{n-1}(t) = X_{n-1}(t)(-a_{n-1,0} + a_{n-1,n-2}X_{n-2}(t) - a_{n-1,n}X_n) dt + X_{n-1}(t) dE_{n-1}(t)$$

$$dX_n(t) = X_n(t)(-a_{n0} + a_{n,n-1}X_{n-1}(t) + X_n(t) dE_n(t)$$

(1.3)

where  $\mathbf{E}(t) = (E_1(t), \dots, E_n(t))^T = \Gamma^T \mathbf{B}(t)$  for an  $n \times n$  matrix  $\Gamma$  such that  $\Gamma^T \Gamma = \Sigma = (\sigma_{ij})_{n \times n}$  and  $\mathbf{B}(t) = (B_1(t), \dots, B_n(t))$  is a vector of independent standard Brownian motions. We denote by  $\delta^*$  the probability measure putting all of its mass at the origin  $(0, \dots, 0)$ .



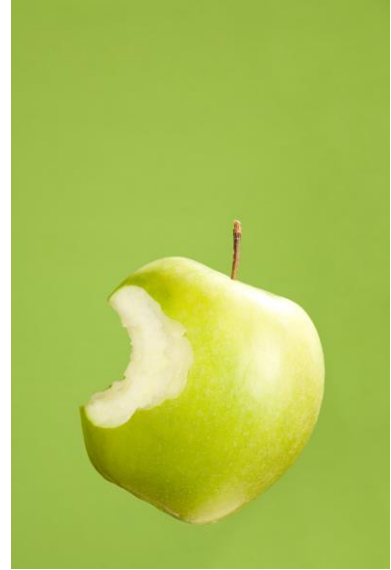
# Yliopistossa jatketaan lukiota

Matematiikka pääaineena on kielellä runoilua:

- Alkuun samat asiat, mutta syvemmin, todistaen
- Abstrakti ranka joka sopii monen asian sisään
  - Derivaatat voisi opettaa "liikkeen matematiikkana", mutta ne sopivat niin moneen muuhunkin!

Luonnontieteet ovat kielellä puhumista:

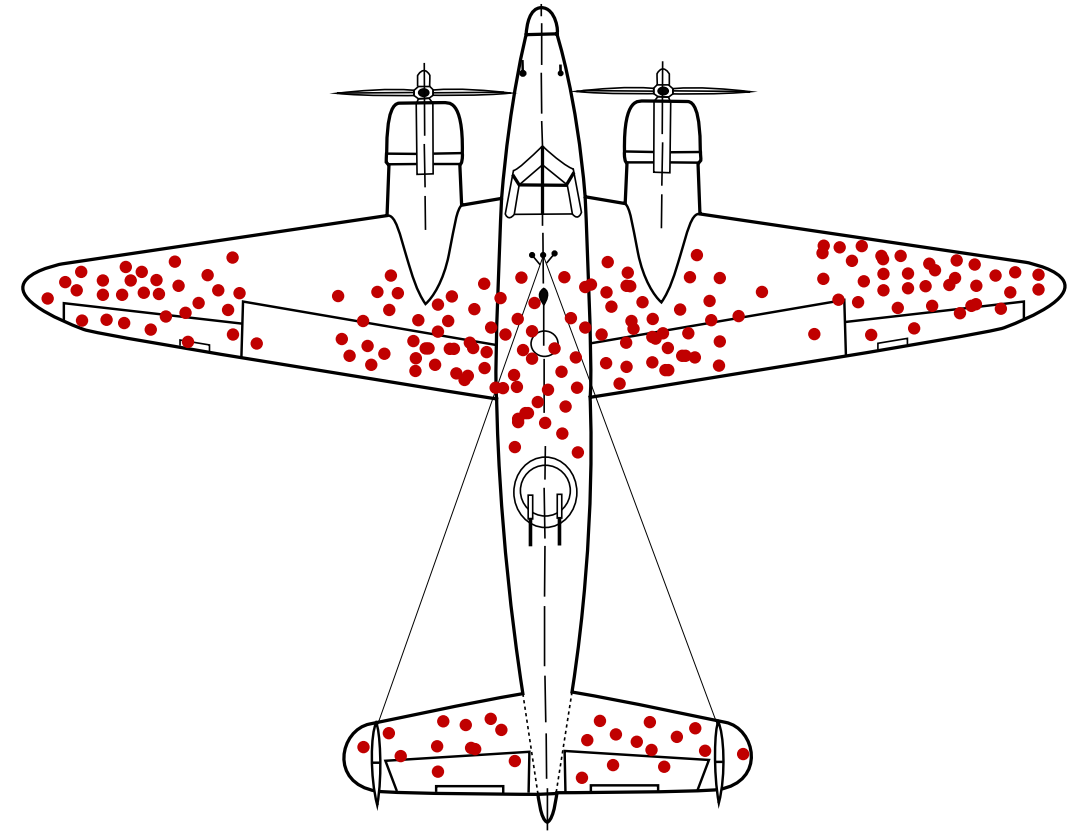
- Kunkin alan työkaluja, "laske tällä kaavalla"
- Asian sanomista tarkemmin ja lyhyemmin





# Matematiikka on varovaista ajattelua

- Kaikki koirat haukkuvat. Musti on koira. Siis Musti haukkuu.
- Essee ei kaadu yhteen virheeseen, matemaattinen päättely kaatuu. Ketju ei toimi jos yksi linkki katkeaa.
- Yksi euro on yksi sentti:  
 $1e = 100s = (10s)^2$   
 $= (0.1e)^2 = 0.01e = 1s$





# Virheitä on helppo tehdä jos ei ajattele tarkasti

**LAUSE 5.0.8.**  $1 = 2$ .

*Todistus.* Olkoon  $a, b \in \mathbb{R}$  siten että  $a = b \neq 0$ . Tällöin

$$a = b$$

$$a^2 = ab$$

$$a^2 - b^2 = ab - b^2$$

$$(a - b)(a + b) = b(a - b)$$

$$a + b = b$$

$$b + b = b$$

$$2b = b$$

$$2 = 1.$$

**LAUSE 5.0.10.** Kaikki hevoset ovat samanvärisiä.

*Todistus.* Induktiolla.

1. (tapaus  $n = 1$ ) Yksi hevonen on samanvärisen.
2. (induktio-oletus,  $n = k$ ) Oletetaan että kaikki  $k$ :n hevosen joukot ovat samanvärisiä.
3. (induktioaskel,  $n = k + 1$ ) Otetaan  $k + 1$  hevosen joukko. Otetaan siitä erilleen yksi hevonen. Tällöin jäljelle jää  $k$  hevosen joukko, jotka ovat induktio-oletuksen nojalla samanvärisiä. Poistetaan joukosta yksi hevonen ja korvataan se äsken erilleen otetulla hevosella. Tämä on edelleen  $k$  hevosen joukko, so.  $k$  samanvärisen hevosen joukko. Näin ollen kaikki  $k + 1$  hevosta ovat samanvärisiä.  $\square$



# Virheitä on *tosi* helppo tehdä

**HUOMAUTUS 5.0.11** (Murtolukujen sieventäminen on helppoa).

$$\frac{16}{64} = \frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4}, \quad \frac{19}{95} = \frac{1\cancel{9}}{\cancel{9}5} = \frac{1}{5}, \quad \frac{26}{65} = \frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5} = \frac{2}{5}, \quad \frac{49}{98} = \frac{4\cancel{9}}{\cancel{9}8} = \frac{4}{8}$$

**LAUSE 5.0.9.**  $1 = -1$ .

*Todistus.* Olkoon  $i$  imaginääriyksikkö eli luku  $i := \sqrt{-1}$ , jolla  $i^2 = -1$ . Tällöin

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = ii = i^2 = -1.$$



# Matematiikassa kaikki on määritelty

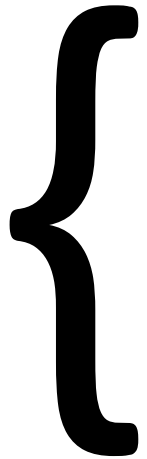
- "Mitä se tarkoittaa että  $f$  on polynomi?"
  - "Sitä että se on muotoa  $Ax^n$  olevien termien summa, missä  $x$  on muuttuja ja  $A, n$  ovat reaalityyppisiä lukuja."
- Vertaa: "Mitä se tarkoittaa että ihminen on hyvä?"
  - "?????", "No siitä voi olla monta mieltä", "Esimerkiksi tätä"
- Jos liian moni asia jää epäselväksi, niin ei pääse eteenpäin. (Lausetta on vaikea ymmärtää jos jokainen sana pitää katsoa sanakirjasta.)
- Opettele asia kerrallaan, ei sitten kun kaikki kaatuu päälle.





# Matemaattisen asian ymmärtäminen

Molempia  
tarvitaan



- Määritelmä
  - "funktio  $f$  on kasvava jos  $f(x) \geq f(y)$  kun  $x > y$ ."
- Intuitio
  - "isommalla muuttujalla saa isomman funktion arvon"
  - "sen kuvaaja menee ylöspäin"
- Esimerkkejä
  - " $f(x) = 5x$ ,  $f(x)=x+2$ ,  $f(x) = \sin x$  (joillain arvoilla), jne."
- Ymmärrys



# Tietojenkäsittelytiede on matikkaa

- Tietokoneet toimivat matemaattisen logiikan mukaan
- Ohjelmointi on logiikkaketjuja; "tietokone on niin tyhmä että se tekee täsmälleen mitä käsketään"
- Jos osaa ohjelmoida, osaa matematiikkaa
- Luonnontieteissä käytetään matemaattisia ohjelmistoja: Matlab (matriisilaskenta), R (tilastollinen laskenta), Python/Scipy/Numpy (kaikki), LaTeX (tekstinkäsittely)



# Luonnontieteellinen pedagogiainho

- Omia motivaatioita ja tavoitteita kannattaa miettiä.
- Sisäinen, ulkoinen? ("Tämä on jännää" vai "Jee, tällä saa rahaa")
- Mitkä ovat sellaisia pieniä palasia joista saa energiaa? (Sokeripalat?)
- Yksi kiipeää mukaan teorian kautta, toinen käytännön; eri ihmiset oppivat eri tavoilla.



# Yliopisto-opinnot?

- Erilaisia kuin vaikka vain kymmenen vuotta sitten
- Useammin verkossa
- Flipattua oppimista
  - ennen: yhteinen luento, ongelmat/harjoitukset yksin
  - flipattuna: videoluento yksin, ongelmat yhdessä
- Yliopistossa koetetaan opettaa sen verran väljästi että kullakin on tilaa omalle parhaalle tavalleen oppia